



TITLE:

コクセターグラフ E_6 の量子
 \mathbb{Z}_6 記号から作られる3次元多様体
のTuraev-Viro-Ocneanu不変量につ
いて (\mathbb{Z}_6 -symbolから導かれる位
相的量子場の理論の研究)

AUTHOR(S):

和久井, 道久

CITATION:

和久井, 道久. コクセターグラフ E_6 の量子 \mathbb{Z}_6 記号から作られる3次元多様体のTuraev-Viro-Ocneanu不変量について (\mathbb{Z}_6 -symbolから導かれる位相的量子場の理論の研究). 数理解析研究所講究録 1998, 1053: 6-29

ISSUE DATE:

1998-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62272>

RIGHT:

コクセターグラフ E_6 の量子 $6j$ 記号から作られる 3次元多様体の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量について

阪大・理 和久井道久 (Michihisa Wakui)

この記事は、NTT研修所「銀鱗荘」での浅枝雅子氏による演習つきの講演[1]と D. E. Evans と河東泰之氏による本[3]の第12章の前半部分をもとに書かれている。

Ocneanu は、fusion rule algebra と呼ばれる基底付き代数を定義し、これとそれらの intertwiner spaces および量子 $6j$ 記号を初期データとして、向きづけられた閉3次元多様体の Turaev-Viro 型の不変量を定義した。さらに、その定義を境界つき3次元多様体に対して拡張することにより $(2+1)$ 次元位相的量子場の理論の公理を満たす関手が得られることを示した。そして、ある種の C^* -環(インデックス有限かつ深さ有限の部分因子環)に対して、どのようにして先ほどの初期データを構成したらよいのか、その構成方法を与えた。Ocneanu のこれらの構成方法は Evans と河東氏による本[3]の第12章の中で、証明つきで紹介されている。

インデックス有限かつ深さ有限の部分因子環は、ある infinite factor 上の endomorphism の、内部自己同型による同値類(セクター)たちと一対一に対応している。セクターに対する積や intertwiner、量子 $6j$ 記号などの概念もあるので、Ocneanu が与えた Turaev-Viro 型の不変量はセクターから出発しても構成することができる。

このノートの目的は、初期データとして、コクセターグラフ E_6 の AFD type II_1 -部分因子環に対応するセクターたちのなす fusion rule algebra を採用した場合に、Turaev-Viro-Ocneanu 不変量を具体的に書き下し、それが実際に不変量になっていることを作用素環論を使わずに直接証明することである。 E_6 のセクターに関する具体的なデータは泉氏の論文[4]に基づいている。

Turaev-Viro 不変量[9]とは、大雑把に述べると、次のようなものである。まず、ある有限集合 I とそれらの6個の元の組に対して複素数を対応させる関数 $Z: I^6 \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられているとする。 I の元を基底とする \mathbb{C} 上の代数が定義されていて、 $a \cdot b = \sum_c N_{a,b}^c c$ によって構造定数 $N_{a,b}^c$ を定義するとき、この値が、0 または 1 であるとする(彼等は、 $N_{a,b}^c = 1$ であるような a, b, c の3組を admissible と呼んでいる)。さらに、関数 Z は四面体の合同変換に関して対称性を持ち、ユニタリティとペンタゴンと呼ばれる2つの関係式を満足しているとする。これらのデータが1つ与えられたとき、3次元多様体の Turaev-Viro 不変量が定義される。

閉3次元多様体 M の単体分割 T を1つとる。 T の各辺に I の元を割り振る仕方をカラーと呼ぶ。カラーを1つ与えると、各四面体に対して関数 Z を使って、ある複素数(量子 $6j$ 記号)を対応させることができる。そして、すべての四面体に関してこれらの積をとってからカラーについて和をとったものは、 Z が満たす2つの関係式ユニタリティとペンタゴンにより、 M の単体分割 T の選び方によらない量、すなわち、 M の位相不変量になっている。

上の説明には若干のうそが含まれているが、今は気にしないでいただきたい。注目してもらいたいことは、Turaev-Viro 不変量では、不変量を定義するために用いた初期データの中の構造定数 $N_{a,b}^c$ が 0 か 1 になるものに限定されていることである。Ocneanu はこの条件をゆるめ

て、Turaev-Viro 型の不変量を構成した。構造定数に関する条件をゆるめたために、単体分割の辺ばかりでなく、面についてもカラーを考えることが必要になる。ここが、従来の Turaev-Viro 不変量と較べて新しくなっている部分である。

E_6 のセクターから定義される fusion rule algebra はその構造定数 $N_{a,b}^c$ に 2 以上のものが現れる最も簡単な例である。そして、これを初期データとして レンズ空間 $L(3,1)$ の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量を計算すると、実数でない複素数の値が現れる(詳しくはこの講究録の中の鈴木氏の記事[7]を参照)。一方、Turaev-Viro 不変量は Reshetikhin と Turaev が定式化した量子 $SU(2)$ 不変量の絶対値の 2 乗に等しい(したがって、特に、実数値をとる)ことが Turaev[8]等によって知られている。これらのことから、Turaev-Viro-Ocneanu 不変量は従来の Turaev-Viro 不変量では捉えられない情報を含んでいることが期待される。

この記事の構成は以下の通りである。第 1 節では、 E_6 のデータをもとにして、Evans と河東氏の本[3]に書かれている向きづけられた閉 3 次元多様体の不変量を具体的に書き下す。第 2 節では、第 1 節で定義した不変量の位相不変性の証明の概略を説明する。第 3 節では、第 1 節の不変量を境界が空でなくてもよい コンパクトな 3 次元多様体の不変量へ拡張し、Turaev と Viro が彼等の不変量について行ったのと同様の説明で、 $(2+1)$ 次元位相的量子場の理論の公理を満たす共変関手の構成方法とそれに附随する閉曲面の写像類群の表現の構成方法を述べる。

謝辞： 浅枝雅子氏には、作用素環論に不慣れな私の質問に丁寧に答えて頂き、感謝しております。中坊滋一氏と小須田雅氏には、不変量の定義の仕方をよく理解していない段階で、いろいろな疑問点を聞いていただき、感謝しております。鈴木幸太郎氏には、具体例の計算の仕方や泉氏の文献等について教えていただきました。ここに、深くお礼申し上げます。最後に、この研究会を企画し、講究録に記事を書く機会を与えて下さいました村上斉氏に感謝致します。

§1. 不変量の定義

id, α, ρ を複素数体 \mathbb{C} 上の基底に持つ 3 次元のベクトル空間に、下の表のような積をいれた代数をコクセターグラフ E_6 の fusion rule algebra[†] という。

	id	α	ρ
id	id	α	ρ
α	α	id	ρ
ρ	ρ	ρ	$id + \alpha + 2\rho$

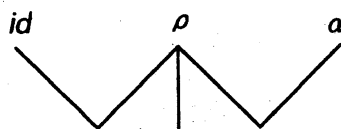


図 1 : E_6 の principal グラフ

\mathcal{M} を S_1, S_2, S_3, S_4 を \mathbb{C} 上の基底に持つ C^* -代数^{††}であって、

$$S_i^* S_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4), \quad S_1 S_1^* + S_2 S_2^* + S_3 S_3^* + S_4 S_4^* = 1$$

を満たしているものとする。ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、1 は \mathcal{M} の代数としての単位元である。

さて、 $a, b, c \in \{id, \alpha, \rho\}$ に対して、負でない整数 $N_{a,b}^c$ を $a \cdot b = \sum_c N_{a,b}^c c$ によって定め、 $\dim \mathcal{H}_{a,b}^c = N_{a,b}^c$ であるようなヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{a,b}^c \subset \mathcal{M}$ を以下のように与える^{†††}。 $\mathcal{H}_{a,b}^c$ を **intertwiner space** という。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{id,\alpha}^a &= \mathbb{C}1, \quad \mathcal{H}_{a,id}^a = \mathbb{C}1 \quad \text{for } a \in \{id, \alpha, \rho\} \\ \mathcal{H}_{\alpha,\alpha}^{id} &= \mathbb{C}1, \quad \mathcal{H}_{\alpha,\rho}^\rho = \mathbb{C}1, \quad \mathcal{H}_{\rho,\alpha}^\rho = \mathbb{C}U \\ \mathcal{H}_{\rho,\rho}^{id} &= \mathbb{C}S_1, \quad \mathcal{H}_{\rho,\rho}^\alpha = \mathbb{C}S_2, \quad \mathcal{H}_{\rho,\rho}^\rho = \mathbb{C}S_3 \oplus \mathbb{C}S_4 \end{aligned}$$

但し、

$$U := S_1 S_1^* - S_2 S_2^* + S_3 S_4^* + S_4 S_3^*$$

であり、上記以外の $a, b, c \in \{id, \alpha, \rho\}$ に対しては $\mathcal{H}_{a,b}^c = \{0\}$ である。

E_6 の fusion rule algebra は \mathcal{M} に以下のように作用する[4]。

$$\alpha(S_1) = S_2, \quad \alpha(S_2) = S_1, \quad \alpha(S_3) = S_3, \quad \alpha(S_4) = -S_4$$

$$\begin{aligned} \rho(S_1) &= \frac{S_1 + S_2}{d} + \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_3^2 + e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_4^2}{\sqrt{d}}, \\ \rho(S_2) &= \left[\frac{S_1 - S_2}{d} + \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_4 S_3 + e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_3 S_4}{\sqrt{d}} \right] U, \\ \rho(S_3) &= c_1 \left[\frac{S_1 + S_2}{\sqrt{2}} S_3^* + \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}} S_4^* \right] \\ &\quad + c_2 [S_3(S_1 S_1^* + S_2 S_2^*) + S_4(S_1 S_1^* - S_2 S_2^*)] \\ &\quad + c_3 [S_3 S_3 S_3^* + S_4 S_3 S_4^*] + c_4 [S_3 S_4 S_4^* + S_4 S_4 S_3^*], \\ \rho(S_4) &= c_1 \left[\frac{S_1 + S_2}{\sqrt{2}} S_3^* - \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}} S_4^* \right] \\ &\quad + c_2 \sqrt{-1} [S_3(S_1 S_1^* + S_2 S_2^*) - S_4(S_1 S_1^* - S_2 S_2^*)] \\ &\quad + c_4 \sqrt{-1} [S_3 S_3 S_3^* - S_4 S_3 S_4^*] + c_3 \sqrt{-1} [S_3 S_4 S_4^* - S_4 S_4 S_3^*] \end{aligned}$$

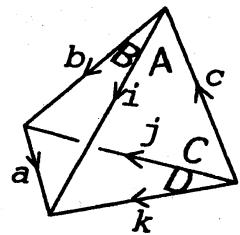
但し、 $d = 1 + \sqrt{3}$, $c_1 = \frac{e^{-\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{d}}$, $c_2 = \frac{e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{12}}}{\sqrt{2}}$, $c_3 = -\frac{1}{d}$, $c_4 = \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{\sqrt{2}}$ である。

また、

$$\rho(U) = S_1 S_2^* + S_2 S_1^* + \sqrt{-1} (S_3 U S_4^* - S_4 U S_3^*)$$

となる。

$a, b, c, i, j, k \in \{id, \alpha, \rho\}$ および $A \in \mathcal{H}_{i,c}^k$, $B \in \mathcal{H}_{a,b}^i$, $C \in \mathcal{H}_{b,c}^j$, $D \in \mathcal{H}_{a,j}^k$ に対して、



$$:= \frac{1}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} A^* B^* a(C) D$$

という複素数を考える。この複素数を量子 6j 記号という。ここで、

$$\mu_{id} = \mu_\alpha = 1, \quad \mu_\rho = d = 1 + \sqrt{3}$$

である。

量子 6j 記号の定義において、 $\sqrt{\mu_i \mu_j}$ の逆数を掛けているのは、四面体対称性(四面体の回転に関して、値が不変になり、鏡映に関して複素共役になる)を持たせるためである。なお、 μ_a ($a = id, \alpha, \rho$) の値は、

$$\mu_a \mu_b = \sum_c N_{a,b}^c \mu_c$$

を満たすように作られている。 μ_a は量子群の場合に量子次元と呼ばれるものに相当する。

以上のデータをもとにして 3 次元多様体の不変量を定義することができる。 M を向きづけられた 3 次元閉多様体とする。 T をその 1 つの単体分割とする。

T の辺カラーとは、 T の各辺に対して $\{id, \alpha, \rho\}$ の元を対応させる写像 λ であって、 T の各三角形 $|v_0 v_1 v_2|$ について $N_{\lambda(|v_0 v_1|), \lambda(|v_1 v_2|)}^{\lambda(|v_0 v_2|)} \neq 0$ が成り立っているものをいう。

次に、 T の頂点全体に全順序を勝手な方法で 1 つ入れる。このとき、辺カラー λ を 1 つ固定して、 λ に適合した面カラーを定義する。面カラーとは、 T の各三角形 $|v_0 v_1 v_2|$ ($v_0 < v_1 < v_2$) に対して、上で与えた $\mathcal{H}_{\lambda(|v_0 v_1|), \lambda(|v_1 v_2|)}^{\lambda(|v_0 v_2|)}$ の基底の元を対応させる写像 φ のことをいう。例えば、 $\lambda(|v_0 v_1|) = \lambda(|v_1 v_2|) = \lambda(|v_0 v_2|) = \rho$ の場合には、 $\varphi(|v_0 v_1 v_2|) = S_3$ と $\varphi(|v_0 v_1 v_2|) = S_4$ の 2 通りある。

さて、辺カラー λ と λ に適合する面カラー φ が与えられたとき、 T の各四面体 $\sigma = |v_0 v_1 v_2 v_3|$ ($v_0 < v_1 < v_2 < v_3$) に対して、複素数 $Z(\sigma, \lambda, \varphi)$ を

$$Z(\sigma, \lambda, \varphi) := \left\{ \begin{array}{l} \text{(tetrahedron diagram)} \\ \hline \text{(tetrahedron diagram)} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(M と } \sigma \text{ の向きが同調するとき)} \\ \text{(そうでないとき)} \end{array}$$

によって定める。ここで、 σ には順序 $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$ から誘導される向きを入れている。また、 $\lambda(|v_0v_1|) = a$, $\lambda(|v_1v_2|) = b$, $\lambda(|v_2v_3|) = c$, $\lambda(|v_0v_2|) = i$, $\lambda(|v_1v_3|) = j$, $\lambda(|v_0v_3|) = k$, $\varphi(|v_0v_2v_3|) = A$, $\varphi(|v_0v_1v_2|) = B$, $\varphi(|v_1v_2v_3|) = C$, $\varphi(|v_0v_1v_3|) = D$ とおいている。

定理 1 M を向きづけられた閉 3 次元多様体とする。 T をその単体分割とし、 T の頂点全体に全順序を入れておく。このとき、複素数

$$Z(M) := w^{-v} \sum_{\lambda} \left(\prod_{E: \text{the edges}} \mu_{\lambda(E)} \right) \sum_{\varphi} \prod_{\sigma: \text{the tetrahedra}} Z(\sigma, \lambda, \varphi)$$

は M の位相不変量である。但し、 $w = \mu_{id}^2 + \mu_{\alpha}^2 + \mu_{\rho}^2 = 6 + 2\sqrt{3}$ 、 v は T の頂点の個数、そして λ は T の辺カラー全体を動き、 φ は辺カラー λ を固定したとき、 λ に適合した面カラー全体を動く。

定理を証明するためには、 $Z(M)$ の値が

- ・ T の頂点全体への全順序の与え方によらないこと
- ・ M の単体分割 T の与え方によらないこと

の 2 つを確かめればよい。定理の証明の概略は次の節で述べる。

不変量の定義の仕方から

- ・ 向きづけられた閉 3 次元多様体 M の向きを変えて得られる多様体 $-M$ に対して、

$$Z(-M) = \overline{Z(M)},$$

- ・ 2 つの向きづけられた閉 3 次元多様体 M_1, M_2 の連結和 $M_1 \sharp M_2$ に対して、

$$Z(M_1 \sharp M_2) = w Z(M_1) Z(M_2)$$

であることが容易にわかる。

不変量の具体的な計算例についてはこの講究録の中の鈴木氏の記事[7]を参照されたい。

§2. 定理の証明の概略

一般に、単体分割を使って、一種の「状態和」として定義される Turaev-Viro 型の 3 次元多様体の不変量の位相不変性の証明は、量子 $6j$ 記号について、四面体対称性、ユニタリティ、ペンタゴン関係式の 3 つが成り立つことを示すことによってなされる。作用素環を使って第 1 節で述べたような方法で定義される Turaev-Viro-Oceanu 不変量についても、これら 3 つの(類似の)関係式^{††††}が成り立ち、その位相不変性が証明される。しかし、その証明では、ペンタゴン関係式が成り立つことを示す際に、作用素環論の少し難しい議論が使われる[3]。第 1 節で不変量を定義するために用いた作用素環については、量子 $6j$ 記号の値を容易に求めることができるので、作用素環の一般論を使うことなく、直接ペンタゴン関係式が成り立つことを示すことができる。この節で

は、作用素環論の知識を全く使わないという方針で、定理1の証明の概略を述べる。確かに不変量になっているという雰囲気を感じていただけると嬉しい。

まず、 $Z(M)$ の値が単体分割 T の頂点全体への全順序の与え方によらないことを見てみよう。そのために、面カラーの定義を少し拡張する。 λ を M の単体分割 T の辺カラーとする。 T の各三角形 Δ の頂点たちに順序を入れ、固定する。例えば、 Δ の頂点を v_0, v_1, v_2 とおき、 $v_0 < v_1 < v_2$ という順序 \mathcal{O}_Δ を入れる。このとき、

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta, \lambda) := \mathcal{H}_{\lambda(|v_0 v_1|), \lambda(|v_1 v_2|)}^{\lambda(|v_0 v_2|)}$$

とおき、この空間の正規直交基底を1組選ぶ。 λ に適合する面カラー φ とは、 T の各三角形に対して上で選んだ正規直交基底の元を対応させる規則のこととする。このように、面カラーの定義を変更しておいて、 T とその辺カラー λ に対して、

$$Z(T, \lambda) := \sum_{\varphi} \prod_{\sigma: \text{the tetrahedra}} Z(\mathcal{O}_\sigma, \lambda, \varphi)$$

とおく。ここで、右辺の φ に関する和は λ に適合した面カラー全体を動く。また、 \mathcal{O}_σ は σ の各面の頂点たちに指定された順序から定まる四面体 σ の頂点全体の全順序を表す。そして、 $Z(\mathcal{O}_\sigma, \lambda, \varphi)$ は、 $\sigma = |v_0 v_1 v_2 v_3|$ ($v_0 < v_1 < v_2 < v_3$) とおいたとき、前節で $Z(\sigma, \lambda, \varphi)$ を定義した式と同じ式で定義される複素数である。

補題2 T を向きづけられた3次元閉多様体 M の単体分割とする。 λ を T の辺カラーとする。 T の各三角形について、その頂点たちに順序を入れて固定する。このとき、 $Z(T, \lambda)$ は T の各三角形に対して選んだ正規直交基底の選び方によらない。

(証明のスケッチ) T の面 $\Delta = |v_0 v_1 v_2|$ ($v_0 < v_1 < v_2$) を1つとり、この面についてのみ、 $\mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta, \lambda)$ の正規直交基底の選び方を変えて、他の面については正規直交基底の選び方を変えないとする。このような正規直交基底の取り替えの下で、 $Z(T, \lambda)$ の値が不変であることを示せばよい。

$\mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta, \lambda)$ の2つの正規直交基底 $\{X_1, \dots, X_n\}$, $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ をとる。但し、 $n = \dim \mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta, \lambda)$ とおいた。

$$Y_i = \sum_{j=1}^n u_{ji} X_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

によって $u_{ji} \in \mathbb{C}$ を定義すると、行列 (u_{ij}) はユニタリ行列となる。

Δ 以外の面に関する正規直交基底の元の割り当て φ であって、 λ と適合しているものを1つ固定する。各 $B \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta, \lambda)$ に対して、 φ_B により、 $\varphi_B(\Delta) = B$, $\varphi_B(\Delta') = \varphi(\Delta')$ (Δ' は Δ 以外の面) で定義される T の面カラーを表す。

M は閉多様体なので、 Δ を面とする四面体はちょうど2つある。その2つの四面体 σ_1, σ_2 の各面の頂点たちの順序が、例えば、下図のように与えられている場合を考えてみよう。この場合、向き \mathcal{O}_{σ_1} と \mathcal{O}_{σ_2} は同調していない。今、 \mathcal{O}_{σ_1} が M の向きと同調しているとする。

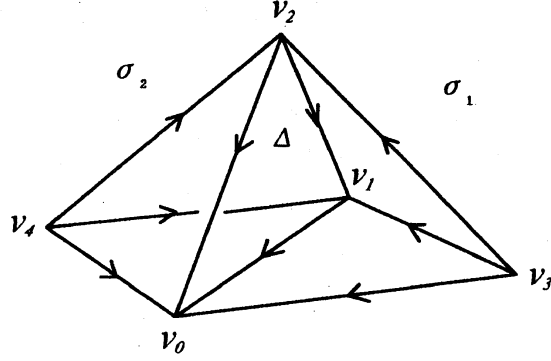


図 2

$\lambda(|v_0v_1|) = a$, $\varphi(|v_0v_2v_3|) = A$, $\varphi(|v_1v_2v_3|) = C$, $\varphi(|v_0v_1v_3|) = D$, $\varphi(|v_0v_2v_4|) = A'$, $\varphi(|v_1v_2v_4|) = C'$, $\varphi(|v_0v_1v_4|) = D'$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}
 & \sum_i Z(\mathcal{O}_{\sigma_1}, \lambda, \varphi_{Y_i}) Z(\mathcal{O}_{\sigma_2}, \lambda, \varphi_{Y_i}) \\
 &= \sum_i A^* Y_i^* a(C) \overline{DA'^* Y_i^* a(C') D'} \\
 &= \sum_{i,j,k} u_{ji} \overline{u_{ki}} A^* X_j^* a(C) \overline{DA'^* X_k^* a(C') D'} \\
 &= \sum_j A^* X_j^* a(C) \overline{DA'^* X_j^* a(C') D'} \\
 &= \sum_j Z(\mathcal{O}_{\sigma_1}, \lambda, \varphi_{X_j}) Z(\mathcal{O}_{\sigma_2}, \lambda, \varphi_{X_j})
 \end{aligned}$$

となる。よって、上図の場合には、 $Z(T, \lambda)$ が不変であることが示された。他の場合についても、同様に証明することができる。□

次のような intertwiners の変換を考える [5]。 $a, b, c \in \{id, \alpha, \rho\}$ に対して、同型写像

$$\sim : \mathcal{H}_{a,b}^c \longrightarrow \mathcal{H}_{a,c}^b$$

および

$$\frown : \mathcal{H}_{a,b}^c \longrightarrow \mathcal{H}_{c,b}^a$$

を

$$\tilde{A} := \sqrt{\frac{\mu_a \mu_b}{\mu_c}} a(A^*) R_a, \quad \hat{A} := \sqrt{\frac{\mu_a \mu_b}{\mu_c}} A^* a(R_b)$$

によって定義する。但し、 A は $\mathcal{H}_{a,b}^c$ の任意の元であり、 $R_{id} = R_\alpha = 1, R_\rho = S_1$ である。容易にわかるように、

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_3 &= \frac{e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{2}} (S_3 + S_4), & \tilde{S}_4 &= \frac{e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{2}} (S_3 - S_4), \\
 \hat{S}_3 &= e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_3, & \hat{S}_4 &= e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_4
 \end{aligned}$$

である。また、 $\mathcal{H}_{a,b}^c$ が1次元空間のときには、どちらの変換に関しても、 $\mathcal{H}_{a,b}^c$ の前節で与えた基底が像の空間の前節で与えた基底に写されていることがわかる。

$\sim, \hat{}$ の逆変換をそれぞれ $\bar{}, \check{}$ で表すことにする。念のために書いておくと、

$$\begin{aligned}\bar{S}_3 &= \frac{e^{-\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{2}}(S_3 + S_4), & \bar{S}_4 &= \frac{e^{-\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{2}}(S_3 - S_4), \\ \check{S}_3 &= e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_3, & \check{S}_4 &= e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_4\end{aligned}$$

となる。

Δ を三角形とする。 λ をその辺カラーとする。 Δ の頂点たちの順序を2つ選び、それを $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ とする。このとき、ヒルベルト空間の間の“同型”写像 $\mathcal{H}(\mathcal{O}, \lambda) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O}', \lambda)$ が $\sim, \hat{}, \bar{}, \check{}$ たちの合成によって一意的に定義される。これを説明する。

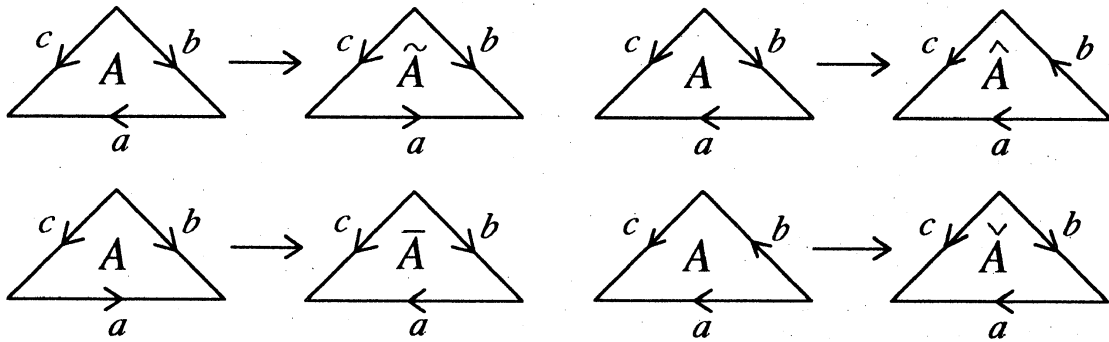


図3

$\Delta = |v_0 v_1 v_2|$ であるとし、順序 \mathcal{O} に関して $v_0 < v_1 < v_2$ であるとする。すると、 $\{0, 1, 2\}$ 上の全単射 F が一意的に存在して、順序 \mathcal{O}' に関して $v_{F(0)} < v_{F(1)} < v_{F(2)}$ となる。このとき、“同型”写像 $F_* : \mathcal{H}(\mathcal{O}, \lambda) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O}', \lambda)$ が \mathcal{O}' に応じて以下のように定義される (F が偶置換のときはユニタリ変換、 F が奇置換のときは共役ユニタリ変換となる)。

- ・ $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき: $F_*(A) = A$
- ・ $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき: $F_*(A) = \hat{A}$
- ・ $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき: $F_*(A) = \tilde{A}$
- ・ $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ のとき: $F_*(A) = \bar{\bar{A}}$
- ・ $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき: $F_*(A) = \check{\check{A}}$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ のとき : } F_*(A) = \hat{\hat{A}} = \tilde{\tilde{A}}$$

補題3 λ を四面体 $\sigma = |v_0 v_1 v_2 v_3|$ の辺カラーとする。 σ の頂点たちの $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$ という全順序を $\mathcal{O}^{(1)}$ とおく。

F を $\{0, 1, 2, 3\}$ 上の全単射とすると、 $v_{F(0)}, v_{F(1)}, v_{F(2)}, v_{F(3)}$ は σ の頂点たちであり、 $v_{F(0)} < v_{F(1)} < v_{F(2)} < v_{F(3)}$ と定義することによって、別の順序を入れることができる。この順序を $\mathcal{O}^{(2)}$ とおく。このとき、これら2つの順序に関して、

$$Z(\mathcal{O}^{(1)}, \lambda, \varphi) = Z(\mathcal{O}^{(2)}, \lambda, F_*\varphi)$$

が成立する。ここで、 φ は λ に適合した順序 $\mathcal{O}^{(1)}$ に関する面カラーであり、 $F_*\varphi$ は、各面 Δ に対して $(F_*\varphi)(\Delta) := F_*(\varphi(\Delta))$ によって定義される順序 $\mathcal{O}^{(2)}$ に関する面カラーである。そして、この右辺の F_* は F によってひき起こされる同型写像 $\mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta^{(1)}, \lambda) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta^{(2)}, \lambda)$ である。

(証明のスケッチ)

$$\textcircled{1} F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\textcircled{2} F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\textcircled{3} F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

の3つの場合に証明すれば十分である。 $\lambda(|v_0 v_1|) = a$, $\lambda(|v_1 v_2|) = b$, $\lambda(|v_2 v_3|) = c$, $\lambda(|v_0 v_2|) = i$, $\lambda(|v_1 v_3|) = j$, $\lambda(|v_0 v_3|) = k$, $\varphi(|v_0 v_2 v_3|) = A$, $\varphi(|v_0 v_1 v_2|) = B$, $\varphi(|v_1 v_2 v_3|) = C$, $\varphi(|v_0 v_1 v_3|) = D$ とおく。

F が $\textcircled{1}$ の場合には、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_b \mu_k}} C^* \tilde{B}^* a(A) \tilde{D} = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} \overline{A^* B^* a(C) D} \quad \dots\dots\dots(1),$$

F が $\textcircled{2}$ の場合には、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_a \mu_c}} D^* \hat{B}^* i(\tilde{C}) A = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} \overline{A^* B^* a(C) D} \quad \dots\dots\dots(2),$$

F が $\textcircled{3}$ の場合には、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_k \mu_b}} \hat{A}^* D^* a(\hat{C}) B = \frac{1}{\sqrt{\mu_i \mu_j}} \overline{A^* B^* a(C) D} \quad \dots\dots\dots(3),$$

を示せばよい。例えば、 $a = b = c = i = j = k = \rho$ 、 $A = B = S_4$ 、 $C = D = S_3$ の場合に計算してみよう。この場合、(1)(2)(3)の右辺は $\frac{1}{d\sqrt{2}}e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}$ となる。

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S. of (1)} &= \frac{1}{d} S_3^* \tilde{S}_4^* \rho(S_4) \tilde{S}_3 \\
 &= \frac{1}{d} S_3^* \left(\frac{e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{2}} (S_3 - S_4) \right)^* \rho(S_4) \frac{e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{2}} (S_3 + S_4) \\
 &= \frac{1}{2d} S_3^* (S_3^* - S_4^*) \rho(S_4) (S_3 + S_4) \\
 &= \frac{1}{2d} (S_3^* S_3^* \rho(S_4) S_3 - S_3^* S_4^* \rho(S_4) S_4) \\
 &= \frac{1}{d\sqrt{2}} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S. of (2)} &= \frac{1}{d} S_3^* \hat{S}_4^* \rho(\tilde{S}_3) S_4 \\
 &= \frac{1}{d} S_3^* \left(e^{\frac{-\pi\sqrt{-1}}{4}} S_4 \right)^* \rho\left(\frac{e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{2}} (S_3 + S_4) \right) S_4 \\
 &= \frac{1}{d\sqrt{2}} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}} S_3^* S_4^* \rho(S_3 + S_4) S_4 \\
 &= \frac{1}{d\sqrt{2}} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} e^{\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}} (S_3^* S_4^* \rho(S_3) S_4 + S_3^* S_4^* \rho(S_4) S_4) \\
 &= \frac{1}{d\sqrt{2}} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S. of (3)} &= \frac{1}{d} \hat{S}_4^* S_3^* \rho(\hat{S}_3) S_4 \\
 &= \frac{1}{d} \left(e^{\frac{-\pi\sqrt{-1}}{4}} S_4 \right)^* S_3^* \rho\left(e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_3 \right) S_4 \\
 &= \frac{1}{d} \sqrt{-1} S_4^* S_3^* \rho(S_3) S_4 \\
 &= \frac{1}{d\sqrt{2}} e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}
 \end{aligned}$$

よって、この場合には(1)(2)(3)が成り立つことが確かめられた。他の場合も同様にして成り立つことがわかる。□

補題 4 T を向きづけられた 3 次元閉多様体 M の単体分割とする。 λ を T の辺カラーとする。このとき、 $Z(T, \lambda)$ は T の頂点全体への全順序の与え方によらない。

(証明) $\mathcal{O}^{(1)}, \mathcal{O}^{(2)}$ を T の頂点全体の2つの全順序とする。 T の各面 Δ について、その頂点全体に $\mathcal{O}^{(1)}, \mathcal{O}^{(2)}$ から誘導される順序をそれぞれ $\mathcal{O}_\Delta^{(1)}, \mathcal{O}_\Delta^{(2)}$ とおく。 Δ の頂点全体からなる集合上の全単射 F_Δ であって、 $\mathcal{O}_\Delta^{(1)}$ を $\mathcal{O}_\Delta^{(2)}$ へ写すものが唯一つ存在する。

さて、各三角形 Δ について、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta^{(1)}, \lambda)$ の正規直交基底 B_Δ を1組選んでおき、この基底を使って、順序 $\mathcal{O}^{(1)}$ に関する λ に適合する面カラーを定義する。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}(\mathcal{O}_\Delta^{(2)}, \lambda)$ の正規直交基底としては B_Δ を $(F_\Delta)_*$ で写して得られる基底を選ぶことにし、この基底を使って、順序 $\mathcal{O}^{(2)}$ に関する λ に適合する面カラーを定義する。

このとき、全順序 $\mathcal{O}^{(1)}$ に関する λ に適合する面カラー φ に対して、 $\mathcal{O}^{(2)}$ に関する λ に適合する面カラー φ' を次のように定義することができる。

$$\varphi'(\Delta) := (F_\Delta)_*(\varphi(\Delta))$$

対応 $\varphi \mapsto \varphi'$ は全順序 $\mathcal{O}^{(1)}$ に関する λ に適合する面カラー全体 $C(\mathcal{O}^{(1)}, \lambda)$ から全順序 $\mathcal{O}^{(2)}$ に関する λ に適合する面カラー全体 $C(\mathcal{O}^{(2)}, \lambda)$ への全単射をひき起こす。

補題2と補題3から

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{(1)} \text{ に基づく } Z(T, \lambda) \text{ の値} &= \sum_{\varphi \in C(\mathcal{O}^{(1)}, \lambda)} \prod_{\sigma: \text{the tetrahedra}} Z(\mathcal{O}_\sigma^{(1)}, \lambda, \varphi) \\ &= \sum_{\varphi \in C(\mathcal{O}^{(1)}, \lambda)} \prod_{\sigma: \text{the tetrahedra}} Z(\mathcal{O}_\sigma^{(2)}, \lambda, \varphi') \\ &= \mathcal{O}^{(2)} \text{ に基づく } Z(T, \lambda) \text{ の値} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\mathcal{O}_\sigma^{(1)}, \mathcal{O}_\sigma^{(2)}$ はそれぞれ $\mathcal{O}^{(1)}, \mathcal{O}^{(2)}$ から誘導される σ の頂点全体からなる集合上の順序を表す。こうして、補題の証明が終わった。□

次に $Z(M)$ の値が M の単体分割 T の与え方によらないことを見てみよう。そのために、多様体の位相型を変えない単体分割の変形に関する Pachner の結果[6]を用いる。3次元多様体に対するPachner変形(またはAlexander変形)とは、図4、5で表されるような単体分割の変形(右から左への変形と左から右への変形)のことである：

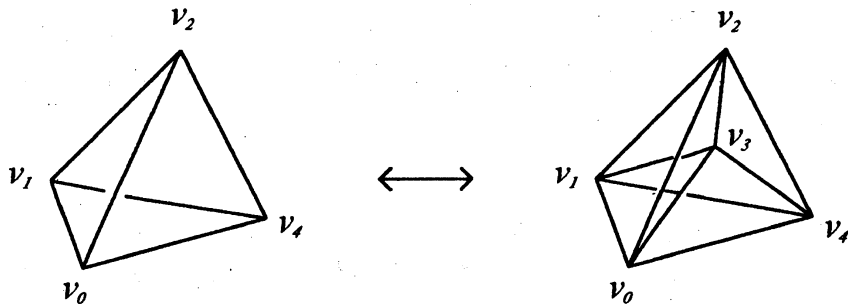


図4

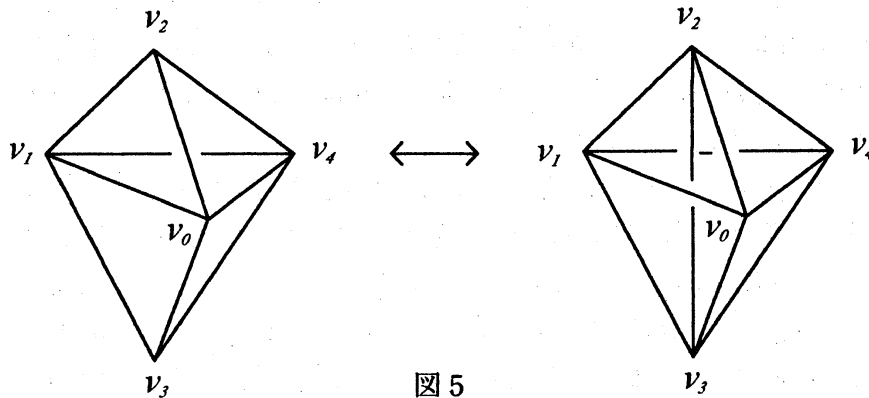


図 5

図 4 の右図、図 5 の右図、図 5 の左図では、それぞれ 4 つ、3 つ、2 つの四面体が頂点、辺、三角形を共有して貼り合わさっている。

定理 5 (Pachner) M をコンパクトな 3 次元多様体とする。 T_1, T_2 をその 2 つの単体分割とし、境界上の分割の仕方は一致しているとする。このとき、境界上の分割の仕方を変えないような Pachner 変形の有限回を施すことにより、一方の分割 T_1 からもう一方の分割 T_2 を得ることができる。□

補題 6 向きづけられた閉 3 次元多様体 M に対して、 $Z(M)$ は図 5 の Pachner 変形の下で不変である。

(証明のスケッチ) 例を使って図 5 の Pachner 変形の下での不変性を検証する。

図 5 の左右どちらの分割も同じ順序を頂点全体からなる集合に入れる。ここでは、 $v_0 < v_1 < v_2 < v_3 < v_4$ としよう。左右の多面体の表面の辺カラー λ と λ に適合する面カラー φ を 1 つずつ固定する。このとき、証明すべき式は、次の等式(ペンタゴン関係式)である。

$$\begin{aligned}
 & \sum_D \left(\text{tetrahedron with faces } A, B, C, D \text{ and edges } a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k \right) \\
 &= \sum_{g \in \{id, \alpha, \rho\}} \sum_{H, I, J} \mu_g \left(\text{tetrahedron with faces } E, F, G, H \text{ and edges } a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k \right) \\
 & \quad \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

ここで、 $a, b, c, e, f, i, j, k, l$ は各対応する辺に λ によって割り当てられたカラーであり、 A, B, C, E, F, G は各対応する面に φ によって割り当てられたカラーである。また、左辺の和は D が $\mathcal{H}_{a,j}^k$ の正規直交基底の元に渡ってとり、右辺の第2番目の和は H, I, J がそれぞれ $\mathcal{H}_{b,g}^e, \mathcal{H}_{i,g}^l, \mathcal{H}_{g,f}^c$ の正規直交基底の元に渡ってとる。

$a = b = c = e = f = i = j = k = l = \rho$ の場合を考えてみよう。まず、(●)の左辺は $A = B$ かつ $E \neq F$ のとき、または $A \neq B$ かつ $E = F$ のときには 0 になることに注意する。表1により、右辺もまたこのときには 0 になっていることがわかる。よって、 $A = B$ かつ $E = F$ のとき、または、 $A \neq B$ かつ $E \neq F$ のときに(●)が成り立つことを示せばよい。(●)式における両辺の多面体の表面の辺につけられた矢印は、三角形 $|v_0 v_1 v_4|$ を含む平面に関して対称になっているから、 $(A, B, C, E, F, G) = (S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, S^{(4)}, S^{(5)}, S^{(6)})$ 、但し、 $S^{(1)}, \dots, S^{(6)} \in \{S_3, S_4\}$ 、のときの(●)式は $(A, B, C, E, F, G) = (S^{(4)}, S^{(5)}, S^{(6)}, S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)})$ のときの(●)式の複素共役になる。したがって、表2にある (A, B, C, E, F, G) の組について(●)式が成り立つことを示せば、 $a = b = c = e = f = i = j = k = l = \rho$ の場合は証明されたことになる。

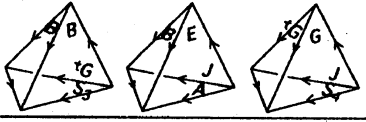
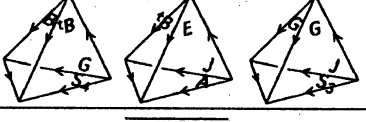
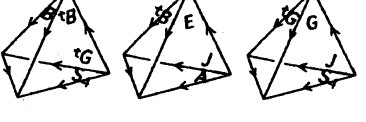
g		μ_g	(●)の右辺の面カラーに関する和の値
id	$B = F, A = E, C = G$ のとき	1	$\frac{1}{d^3}$
	上記以外のとき	1	0
α	$B \neq F, A \neq E, C \neq G$ のとき	1	$\pm \frac{\sqrt{-1}}{d^3}$ 複号は $B = S_3$ のとき +, $B = S_4$ のとき -
	上記以外のとき	1	0
ρ	$F = S_3, C = S_3$ のとき	$d \sum_{J=S_3, S_4}$	
	$F = S_3, C = S_4$ のとき	$d \sum_{J=S_3, S_4}$	
	$F = S_4, C = S_3$ のとき	$d \sum_{J=S_3, S_4}$	
	$F = S_4, C = S_4$ のとき	$d \sum_{J=S_3, S_4}$	

表1：この表では、 ${}^t S_3 = S_4, {}^t S_4 = S_3$ とおいている

例えば、 $A = B = C = S_3, E = F = G = S_4$ の場合に計算してみると、表 2 から

$$\begin{aligned} \text{R.H.S. of (1)} &= 1 \times \frac{\sqrt{-1}}{d^3} + d \sum_{J=S_3, S_4} \text{ (diagrams) } \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{d^3} + d \left(-\frac{\sqrt{-1}}{d^2} \right) \left(\frac{1}{2d^2} + \frac{1}{d^4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{d^4} \\ &= \text{L.H.S. of (1)} \end{aligned}$$

となり、等号が成立する。

A	B	C	E	F	G	(1)の 左辺の値	A	B	C	E	F	G	(1)の 左辺の値
S_3	S_3	S_3	S_3	S_3	S_3	$\frac{1}{d^4}$	S_3	S_4	S_3	S_3	S_4	S_3	$\frac{1}{d^4}$
S_3	S_3	S_3	S_3	S_3	S_4	$-\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d^3\sqrt{2}}$	S_3	S_4	S_3	S_3	S_4	S_4	$\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d^3\sqrt{2}}$
S_3	S_3	S_3	S_4	S_4	S_3	$-\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d^3\sqrt{2}}$	S_3	S_4	S_3	S_4	S_3	S_3	$-\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d^3\sqrt{2}}$
S_3	S_3	S_3	S_4	S_4	S_4	$\frac{\sqrt{-1}}{d^4}$	S_3	S_4	S_3	S_4	S_3	S_4	$-\frac{\sqrt{-1}}{d^4}$
S_3	S_3	S_4	S_3	S_3	S_4	$\frac{1}{2d^2}$	S_3	S_4	S_4	S_3	S_4	S_4	$\frac{1}{2d^2}$
S_3	S_3	S_4	S_4	S_4	S_3	$\frac{\sqrt{-1}}{2d^2}$	S_3	S_4	S_4	S_4	S_3	S_3	$-\frac{\sqrt{-1}}{2d^2}$
S_3	S_3	S_4	S_4	S_4	S_4	$\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d^3\sqrt{2}}$	S_3	S_4	S_4	S_4	S_3	S_4	$\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d^3\sqrt{2}}$
S_4	S_4	S_3	S_4	S_4	S_3	$\frac{1}{2d^2}$	S_4	S_3	S_3	S_4	S_3	S_3	$\frac{1}{2d^2}$
S_4	S_4	S_3	S_4	S_4	S_4	$-\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d^3\sqrt{2}}$	S_4	S_3	S_3	S_4	S_3	S_4	$\frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d^3\sqrt{2}}$
S_4	S_4	S_4	S_4	S_4	S_4	$\frac{1}{d^4}$	S_4	S_3	S_4	S_4	S_3	S_4	$\frac{1}{d^4}$

表 2

他のすべての場合についても同様の要領で等号(1)が成り立つことを確かめることができる。□

図 4 の Pachner 変形の下での不変性を示すため、量子 6j 記号に関する次の等式(ユニタリテイ)を用いる。この等式は、図 6 で表される“単体”分割の変形の下での不変性を保証するもので

ある。図6の左側は、1つの辺とそれを共有する2つの面を接着面として、2つの四面体が貼り合わさっている状況を表しているが、厳密な意味での単体分割にはなっていない。図6の左側から右側への変形は、その2つの四面体を三角形に押しつぶす変形を表している。

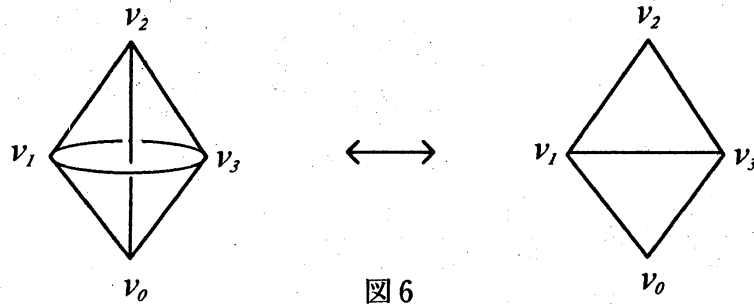


図6

補題7 任意の $a, b, c, j, j', k \in \{id, \alpha, \rho\}$ と $\mathcal{H}_{b,c}^j, \mathcal{H}_{a,j}^k, \mathcal{H}_{b,c}^{j'}, \mathcal{H}_{a,j'}^k$ の正規直交基底の元からそれぞれ選んだ C, C', D, D' について、次の等式が成り立つ。

$$\mu_j \sum_{i \in \{id, \alpha, \rho\}} \mu_i \sum_{A, B} \left(\text{Diagram 1} \right) = \delta_{(j, C, D), (j', C', D')}$$

ここで、左辺の A, B に関する和は A, B をそれぞれ $\mathcal{H}_{i,c}^k, \mathcal{H}_{a,b}^i$ の正規直交基底の元の中で動かしてとる。

(証明のスケッチ) 2つの四面体へのカラーの割り当て方に関する対称性から、 $(j, j') = (id, id), (id, \alpha), (\alpha, \alpha), (id, \rho), (\alpha, \rho), (\rho, \rho)$ の場合に示せばよい。ここでは、 $(j, j') = (\rho, \rho)$ かつ $a = b = c = k = \rho$ の場合を考えよう。この場合には、カラーの割り当て方に関する対称性から、 (C, D, C', D') が表3にあるような10通りの場合に調べればよい。

$$(I) := \left(\text{Diagram 1} \right) + \left(\text{Diagram 2} \right) + \left(\text{Diagram 3} \right) + \left(\text{Diagram 4} \right)$$

$$(II) := \sum_{A, B \in \{S_3, S_4\}} \left(\text{Diagram 5} \right) + \left(\text{Diagram 6} \right)$$

とおくと、

$$\text{補題の左辺} = \mu_\rho \{ (I) + \mu_\rho (II) \}$$

となる。(I)、(II)の値は表3のようになるから、 $(j, j') = (\rho, \rho)$ かつ $a = b = c = k = \rho$ の場合には補題の等号が成り立つことが確かめられた。

(C, D, C', D')	(I)	(II)
(S_3, S_3, S_3, S_3)	$\frac{1}{d^2}$	$\frac{1}{d^4} + \frac{1}{2d^2}$
(S_3, S_3, S_3, S_4)	0	0
(S_3, S_3, S_4, S_3)	$\frac{1}{d^2}$	$-\frac{1}{d^3}$
(S_3, S_3, S_4, S_4)	0	0
(S_3, S_4, S_3, S_4)	$\frac{1}{d^2}$	$\frac{1}{d^4} + \frac{1}{2d^2}$
(S_3, S_4, S_4, S_3)	0	0
(S_3, S_4, S_4, S_4)	$-\frac{1}{d^2}$	$\frac{1}{d^3}$
(S_4, S_3, S_4, S_3)	$\frac{1}{d^2}$	$\frac{1}{d^4} + \frac{1}{2d^2}$
(S_4, S_3, S_4, S_4)	0	0
(S_4, S_4, S_4, S_4)	$\frac{1}{d^2}$	$\frac{1}{d^4} + \frac{1}{2d^2}$

表 3

その他の場合も同じような要領で等号が成り立っていることを確かめることができる。□

ペンタゴン等式とユニタリティから、図 4 の Pachner 変形の下での $Z(M)$ の不変性が示される。

補題 8 向きづけられた閉 3 次元多様体 M に対して、 $Z(M)$ は図 4 の Pachner 変形の下で不変である。

(証明) 図 4 の左側の四面体 σ の頂点たちの順序を $v_0 < v_1 < v_2 < v_4$ で与える。 σ の辺カラー λ と λ に適合する面カラー φ を 1 つずつ固定する。また、右側の分割については $v_0 < v_1 < v_2 < v_3 < v_4$ で与え、残りの頂点たちに関しては左右の分割とも同じ順序になるように頂点全体に順序を入れて考える。このとき、証明すべき式は、次の等式である。

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \text{四面体 } \sigma \text{ (頂点 } v_0, v_1, v_2, v_4 \text{)} \\ \text{辺カラー } \lambda, \text{ 面カラー } \varphi \end{array} = \frac{1}{w} \sum_{l,m,n,o} \mu_l \mu_m \mu_n \mu_o \\
 & \times \sum_{E,F,G,H,I,J} \begin{array}{c} \text{四面体 } \sigma \text{ (頂点 } v_0, v_1, v_2, v_4 \text{)} \\ \text{辺カラー } \lambda, \text{ 面カラー } \varphi \end{array} \begin{array}{c} \text{四面体 } \sigma \text{ (頂点 } v_0, v_1, v_2, v_4 \text{)} \\ \text{辺カラー } \lambda, \text{ 面カラー } \varphi \end{array} \begin{array}{c} \text{四面体 } \sigma \text{ (頂点 } v_0, v_1, v_2, v_4 \text{)} \\ \text{辺カラー } \lambda, \text{ 面カラー } \varphi \end{array} \begin{array}{c} \text{四面体 } \sigma \text{ (頂点 } v_0, v_1, v_2, v_4 \text{)} \\ \text{辺カラー } \lambda, \text{ 面カラー } \varphi \end{array} \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

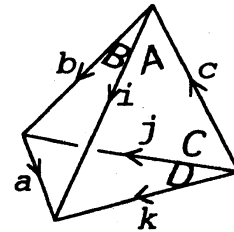
ここで、 a, b, c, i, j, k は各対応する辺に λ によって割り当てられたカラーであり、 A, B, C, D は各対応する面に φ によって割り当てられたカラーである。また、第1番目の和は l, m, n, o が $\{id, \alpha, \rho\}$ に属するような元に渡ってとり、第2番目の和は E, F, G, H, I, J がそれぞれ $\mathcal{H}_{i,l}^n, \mathcal{H}_{m,o}^j, \mathcal{H}_{b,l}^m, \mathcal{H}_{a,m}^n, \mathcal{H}_{n,o}^k, \mathcal{H}_{l,o}^c$ の正規直交基底の元に渡ってとる。

(2)式の右辺の最初の3つの四面体についてペンタゴン関係式(1)を適用することにより、(2)式の右辺は

$$\frac{1}{w} \sum_{m,n,o} \mu_m \mu_n \mu_o \sum_{F,H,I,X}$$

となる。ここで、この式の後の2つの四面体について補題7の関係式を適用して、

$$(2) \text{式の右辺} = \frac{1}{w} \frac{1}{\mu_j} \sum_{m,o} \mu_m \mu_o \dim \mathcal{H}_{m,o}^j$$



となることがわかる。今、任意の $j \in \{id, \alpha, \rho\}$ に対して

$$w = \frac{1}{\mu_j} \sum_{m,o} \mu_m \mu_o \dim \mathcal{H}_{m,o}^j$$

が成り立つから、(2)の等号が成り立つことが示された。□

(定理1の証明) 定理1の $Z(M)$ が M の位相不変量であることを示すには、 M の単体分割 T の頂点全体への全順序の与え方によらないことと M の単体分割 T の与え方によらないことの2つを確かめればよい。前者は補題4で、後者は Pachner 変形の下での不変性を示すことにより補題6と補題8ですでに証明されている。□

§3. 位相的量子場の理論の構成

向きづけられた閉3次元多様体 M に対して定義された定理1の不変量 $Z(M)$ を Turaev と Viro が行ったように境界つき多様体の場合に拡張することができる。そして、その構成の仕方から、 $(2+1)$ 次元位相的量子場の理論の公理を満たす関手を定義することができる。この部分は、ほとんど Turaev-Viro 不変量[9]の場合と同様にして構成される。この節では、その構成方法を簡単に説明する。

M を向きづけられたコンパクトな3次元多様体とする。 K を境界 ∂M の単体分割とし、固定する。さらに、 K の辺カラー ξ を1つ固定する。また、 K の頂点全体に全順序を入れて、 ξ に適合する K の面カラー ψ も1つ固定する。さて、 M の単体分割 T であって、境界上は K と一致しているものを任意にとる。 M の頂点全体には、 K の頂点全体に入れた順序をくるわさないような全順序を勝手に入れる。このとき、

$$Z(M; \xi, \psi) := w^{-v-\frac{p}{2}} \left(\prod_{\substack{e: \text{the edges} \\ \text{of } K}} \sqrt{\mu_{\xi(e)}} \right) \\ \times \sum_{\lambda} \left(\prod_{\substack{E: \text{the edges} \\ \text{of } T-K}} \mu_{\lambda(E)} \right) \sum_{\varphi} \prod_{\sigma: \text{the tetrahedra}} Z(\sigma, \lambda, \varphi)$$

は ∂M の単体分割 K とその辺カラー ξ および ξ に適合する面カラー ψ を固定したときの位相不変量になる。ここで、 $w = 6 + 2\sqrt{3}$ 、 v 、 p はそれぞれ $T-K$ 、 K の頂点の個数である。また、右辺の λ に関する和は K 上では ξ に一致するような T の辺カラー全体にわたってとり、 φ に関する和は、 T の辺カラー λ に適合する T の面カラーであって、 K 上では ψ と一致するようなものの全体にわたってとる。

この不変量を使って、 $(2+1)$ 次元位相的場の理論の公理を満たす関手を構成する方法を述べる。まず、単体的順序コボルディズムの定義を与える。

定義(単体的順序コボルディズム) M を向きづけられたコンパクトな3次元多様体、 Σ_1, Σ_2 を2つの向きづけられた閉曲面とし、 $\partial M = (-\Sigma_1) \amalg \Sigma_2$ が成り立っているとする。ここで、 $-\Sigma_1$ は Σ_1 の向きを逆にして得られる曲面を表す。 K_i ($i = 1, 2$) を単体的順序複体とし、 $j_i: |K_i| \rightarrow M$ を $j_i(|K_i|) = \Sigma_i$ であるような埋め込みとする。 j_1 は向きを保たず、 j_2 は向きを保っているとする。このとき、組 $W = (M; j_1, j_2)$ を3次元の単体的順序コボルディズムという。あからさまに書いていないが、 W は単体的順序複体 K_i ($i = 1, 2$) も含めた組を考えている。

注意: 単体的順序複体とは、単体的複体であって、その頂点全体に全順序が指定されているものをいう。また、ある位相空間の単体分割であって、その頂点全体に全順序が指定されているものを順序単体分割と呼ぶことにする。

2つの単体的順序コボルディズム $W = (M; j_1, j_2)$ と $X = (N; k_1, k_2)$ が同型であるとは、向きを保つ同相写像 $h: M \rightarrow N$ が存在して、 $k_i = h \circ j_i$ ($i = 1, 2$) となることをいう。

単体的順序コボルディズム $W_1 = (M; j_1, j_2)$, $W_2 = (N; j'_2, j_3)$ であって、 j_2, j'_2 の定義域が一致しているものに対して、合成 $W_2 \circ W_1$ を

$$W_2 \circ W_1 := (M \cup_{j_2 \circ j'_2 - 1} N; j_1, j_3)$$

によって定義することができる。また、向きづけられた閉曲面の順序単体分割 K に対して、単体的順序コボルディズム

$$id_K := (|K| \times [0, 1]; i_0, i_1)$$

を K 上の恒等順序コボルディズムという。ここで、 $i_t : |K| \rightarrow |K| \times [0, 1]$ ($t = 0, 1$) は $i_t(x) = (x, t)$ によって定義される埋め込みである。こうして、向きづけられた閉曲面の順序単体分割を対象とし、単体的順序コボルディズムの同型類を射とする圏が定義される。

さて、 Σ を向きづけられた閉曲面とし、ある単体的順序複体 K の幾何学的実現として得られているものとする： $\Sigma = |K| = \bigcup_{\sigma: \text{the simplices of } K} \sigma$ 。このとき、 K の辺カラー ξ

とそれに適合する面カラー ψ との組 $[\xi, \psi]$ 全体を \mathbb{C} 上の基底とするようなベクトル空間を $V(\Sigma; K)$ とおく。次に、3次元の単体的順序コボルディズム $W = (M; j_1, j_2)$ が与えられたとする。 $j_i : |K_i| \rightarrow M$, $\Sigma_i = |K_i|$ ($i = 1, 2$) とおく。このとき、線形写像 $\Phi_W : V(\Sigma_1; K_1) \rightarrow V(\Sigma_2; K_2)$ を次のように定義する。 M の単体分割 T であって、 ∂M 上の分割の仕方が $K_1 \amalg K_2$ と一致するようなものをとる。 $V(\Sigma_1; K_1)$ の基底の元 $[\xi_1, \psi_1]$ に対して、

$$\Phi_W([\xi_1, \psi_1]) = \sum_{[\xi_2, \psi_2] : \text{the colors of } K_2} Z(M; \xi_1 \sqcup \xi_2, \psi_1 \sqcup \psi_2) [\xi_2, \psi_2]$$

により定義する。ここで、 $\xi_1 \sqcup \xi_2$, $\psi_1 \sqcup \psi_2$ はそれぞれ ξ_1, ξ_2 から誘導される T の境界の辺カラー、 ψ_1, ψ_2 から誘導される T の境界の面カラーを表す。

合成可能な単体的順序コボルディズム W_1, W_2 について、 $\Phi_{W_2 \circ W_1} = \Phi_{W_2} \circ \Phi_{W_1}$ が成立するが、幾何学的実現が閉曲面になるような順序単体分割 K について、 $\Phi_{id_K} = id_{V(|K|; K)}$ が成立しない。そこで、Turaev と Viro が行ったのと同様の処置をする。すなわち、ある単体的順序複体 K の幾何学的実現として得られているような向きづけられた閉曲面 Σ に対して

$$Z(\Sigma; K) := V(\Sigma; K) / \text{Ker} \Phi_{id_K}$$

とおく。このとき、単体的順序コボルディズム $W = (M; j_1, j_2)$ に対して、線形写像 $\Phi_W : V(\Sigma_1; K_1) \rightarrow V(\Sigma_2; K_2)$ は線形写像 $Z_W : Z(\Sigma_1; K_1) \rightarrow Z(\Sigma_2; K_2)$ を誘導し、 Z は単体的順序コボルディズムの同型類のなす圏から \mathbb{C} 上の有限次元ベクトル空間のなす圏への共変関手を与えていることがわかる。さらに、この Z は位相的量子場の理論の Atiyah の公理[2]を満たすこともわかる。

ところで、ここで構成した $(2+1)$ 次元位相的量子場の理論 Z は、その作り方を見ると、各向きづけられた閉曲面 Σ の順序単体分割 K の選び方に依存しているように見える。しかし、実際には、以下で述べる意味において、順序単体分割の選び方によらない[9]。

向きづけられた閉曲面 Σ がある単体的順序複体 K の幾何学的実現として得られているとする。単体的順序複体 L をもうひとつの Σ の分割とする： $\Sigma = |K| = |L|$ 。 $j_0 : |K| \rightarrow \Sigma \times [0, 1]$, $j_1 : |L| \rightarrow \Sigma \times [0, 1]$ を $j_t(x) = (x, t)$ ($t = 0, 1$) で与えられる埋め込みとして、単体的順序コボルディズム $id_\Sigma(K, L) := (\Sigma \times [0, 1]; j_0, j_1)$ を考える。このとき、 $\Sigma \times [0, 1]$ の順序単体分割 T であって、境界上の分割が頂点たちの順序を込めて K, L に一致しているようなものをとることができる。この T を使うことにより、線形写像 $Z_{id_\Sigma(K, L)} : Z(\Sigma; K) \rightarrow Z(\Sigma; L)$ が得られる。同様にして、単体的順序コボルディズム $id_\Sigma(L, K)$ を考えることにより、線形写像 $Z_{id_\Sigma(L, K)} : Z(\Sigma; L) \rightarrow Z(\Sigma; K)$ が得られる。

$$Z_{id_\Sigma(L, K)} \circ Z_{id_\Sigma(K, L)} = Z_{id_\Sigma(L, K) \circ id_\Sigma(K, L)} = Z_{id_K} = id_{Z(\Sigma; K)},$$

$$Z_{id_\Sigma(K, L)} \circ Z_{id_\Sigma(L, K)} = Z_{id_\Sigma(K, L) \circ id_\Sigma(L, K)} = Z_{id_L} = id_{Z(\Sigma; L)}$$

より、 $Z_{id_\Sigma(K, L)}$ は線形同型写像であることがわかる。

向きづけられた閉曲面 Σ の写像類群の表現も Turaev と Viro が与えたようにして定義することができる。 Σ を多面体として実現された向きづけられた閉曲面とする。 K を Σ の1つの順序単体分割とし、固定する。 Σ 上の向きを保つ PL 同相写像 $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ が与えられたとする。 Σ の順序単体分割 K_1, K_2 をとって、 h が K_1 から K_2 への単体写像となるようにできる。このとき、線形同型写像 $h^\sharp : V(\Sigma; K_1) \rightarrow V(\Sigma; K_2)$ が $V(\Sigma; K_1)$ の基底の元 $[\xi_1, \psi_1]$ に対して

$$h^\sharp([\xi_1, \psi_1]) = [\xi_1 \circ h^{-1}, \psi_1 \circ h^{-1}]$$

となるように定義できる。ここで、 $\xi_1 \circ h^{-1}$ は K_2 の辺 e に対して $(\xi_1 \circ h^{-1})(e) = \xi_1(h^{-1}(e))$ によって定義される辺カラーであり、 $\psi_1 \circ h^{-1}$ は K_2 の面 Δ に対して $(\psi_1 \circ h^{-1})(\Delta) = \psi_1(h^{-1}(\Delta))$ によって定義される面カラーである。 $V(\Sigma, K)$ 上の線形同型写像 h_\sharp が合成

$$h_\sharp := \Phi_{id_\Sigma(K_2, K)} \circ h^\sharp \circ \Phi_{id_\Sigma(K, K_1)}$$

によって与えられる。 h_\sharp は線形同型写像 $h_* : Z(\Sigma; K) \rightarrow Z(\Sigma; K)$ を誘導する。こうして、 Σ の $Z(\Sigma; K)$ を表現空間とする線形表現 $h \mapsto h_*$ が得られる。

このようにして定義される写像類群の表現を具体的に求めることは、まだなされていないが、具体例の計算のためにも、Dehn 手術公式を導くためにも重要である。

参考文献

- [1] M. Asaeda “NTT 研修所「銀鱗荘」で行われた研究会「エキゾチックな位相的場の理論の研究」における講演”, 5-8/2/1998
- [2] M. F. Atiyah “Topological quantum field theories”, Publ. Math. I.H.E.S. **68** (1989) p.175—186
- [3] D. E. Evans and Y. Kawahigashi “Quantum symmetries on operator algebras”, Oxford University Press, 1998

- [4] M. Izumi "Subalgebras of infinite C^* -algebras with finite Watatani indices I. Cuntz algebras", Commun. Math. Phys. **155** (1993) p.157—182
- [5] M. Izumi "Subalgebras of infinite C^* -algebras with finite Watatani indices II. Cuntz-Krieger algebras", Duke Math. J. **91** (1997) p.1—53
- [6] U. Pachner "P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings", Europ. J. Comb. **12** (1991), p.129—145
- [7] K. Suzuki "三次元球面 S^3 、レンズ空間 $L(2,1), L(3,1)$ の Turaev-Viro-Oceanu 不変量の計算", in this kōkyūroku
- [8] V. G. Turaev "Quantum invariants of knots and 3-manifolds", Walter de Gruyter, 1994
- [9] V. G. Turaev and O. Ya. Viro "State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols", Topology **31** (1992), p.865—902

\dagger : fusion rule algebra [3]とは、一般には、以下の公理を満たす基底つき代数である。

$\{X_i\}_{i \in I}$ を有限集合とし、 $\{X_i\}_{i \in I}$ 上に involution $X_i \mapsto \overline{X_i}$ が与えられているとする。 $\{X_i\}_{i \in I}$ を複素数体 \mathbb{C} 上の基底とするようなベクトル空間が、以下の条件を満足する代数の構造を持つとき、この代数を **fusion rule algebra** という。

任意の $X, Y, Z \in \{X_i\}_{i \in I}$ に対して複素数 N_{XY}^Z を $XY = \sum_Z N_{XY}^Z Z$ で定義する。

(i) 任意の $X, Y, Z \in \{X_i\}_{i \in I}$ に対して N_{XY}^Z は負でない整数である。

(ii) ある特別な元 $0 \in I$ があって、 X_0 はこの代数の単位元である。さらに、 $\overline{X_0} = X_0$ を満たす。

(iii) 任意の $X, Y, Z \in \{X_i\}_{i \in I}$ に対して次が成り立つ。

$$N_{XY}^Z = N_{\overline{Z}X}^{\overline{Y}} = N_{Y\overline{Z}}^{\overline{X}} = N_{\overline{Y}}^{\overline{Z}X} = N_{\overline{X}Z}^Y = N_{XY}^{\overline{X}}$$

E_6 の fusion rule algebra では、任意の $a \in \{id, \alpha, \rho\}$ に対して $\overline{a} = a$ となっている。

$\dagger\dagger$: このノートでは、 \mathbb{C} 上の代数 \mathcal{A} であって、次の条件を満足する \mathcal{A} 上の作用素 $*$ が与えられているものを C^* -代数と呼んでいる。

$x, y \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$ に対して、

(i) $(x + y)^* = x^* + y^*, (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

(ii) $x^{**} = x$

ここで、 $\overline{\lambda}$ は λ の複素共役を表す。

$\dagger\dagger\dagger$: このノートでは、天下り的にこの空間を定義したが、一般には、以下のようにして定義される。

M を infinite factor とする。 $\rho: M \rightarrow M$ が M 上の endmorphism であるとは ρ が積と $*$ -作用素を保つ線形写像のときをいう (endmorphism の内部自己同型による同値類がセク

ター)。 ρ, τ を M 上の 2 つの endmorphism とする。 $s \in M$ が ρ と τ の間の intertwiner であるとは、

$$s\rho(x) = \tau(x)s \quad \text{for } \forall x \in M$$

が成り立つときをいう。 ρ と τ の間の intertwiners 全体のなす空間を (ρ, τ) と書く。このとき、既約なセクター ρ, τ, η に対して、 $\mathcal{H}_{\rho, \tau}^{\eta} = (\eta, \rho \otimes \tau)$ である。ここで、 ρ, τ に対して、 $\rho \otimes \tau := \rho \circ \tau$ としている。

††† : 3 つの関係式とは、以下のものである。

- ・ tetrahedral symmetry : 補題 3 の関係式。
- ・ unitarity : 補題 7 の関係式。
- ・ pentagon identity : 補題 6 の証明中の関係式(①)。

付録

定理 1 の具体例の計算のためには、あらかじめ、量子 6j 記号の値の表を作っておくと便利である。そこで、 $A \in \mathcal{H}_{i,c}^k$, $B \in \mathcal{H}_{a,b}^i$, $C \in \mathcal{H}_{b,c}^j$, $D \in \mathcal{H}_{a,j}^k$ が intertwiner space の定義で用いた正規直交基底 $1, U, S_1, S_2, S_3, S_4$ である場合の量子 6j 記号の値の完全なリストを挙げておく。

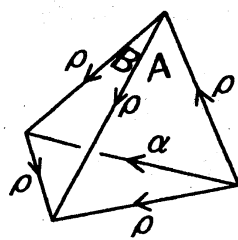
- I. 四面体の 6 つの辺のカラーに ρ が 1 つも現れない場合 : 量子 6j 記号の値は常に 1 となる。
- II. 四面体の 6 つの辺のカラーに ρ がちょうど 3 つ現れる場合 : 量子 6j 記号の値は常に $\frac{1}{\sqrt{d}}$ となる。
- III. 四面体の 6 つの辺のカラーに ρ がちょうど 4 つ現れる場合 : 量子 6j 記号の値は

$$\begin{cases} \text{残りの 2 つの辺のカラーがともに } \alpha \text{ の場合は} & -\frac{1}{d}, \\ \text{上記以外の場合は} & \frac{1}{d} \end{cases}$$

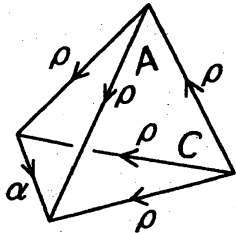
となる。

以下のリストにおいて、面の 3 辺のカラー $a, b, c \in \{id, \alpha, \rho\}$ が $N_{a,b}^c = 1$ の場合には、面のカラーを書くことを省略したが、そこには、その 3 辺のカラーによってきまる intertwiner space の基底の元 ($1, U, S_1, S_2$ のうちのどれか) をのせて計算している。

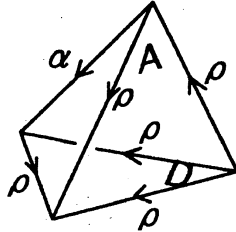
- IV. 四面体の 6 つの辺のカラーに ρ がちょうど 5 つ現れる場合 : 量子 6j 記号の値は以下の値になる。



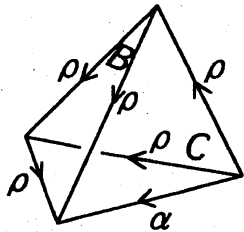
$$= \begin{cases} 0 & \text{if } (A, B) = (S_3, S_3), (S_4, S_4), \\ \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d} & \text{if } (A, B) = (S_3, S_4), \\ \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d} & \text{if } (A, B) = (S_4, S_3) \end{cases}$$



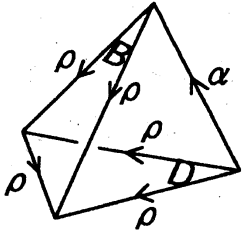
$$= \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{if } (A, C) = (S_3, S_3), \\ -\frac{1}{d} & \text{if } (A, C) = (S_4, S_4), \\ 0 & \text{if } (A, C) = (S_3, S_4), (S_4, S_3) \end{cases}$$



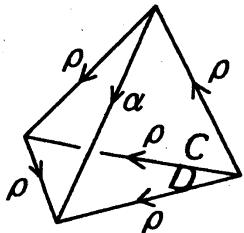
$$= \begin{cases} 0 & \text{if } (A, D) = (S_3, S_3), (S_4, S_4), \\ \frac{1}{d} & \text{if } (A, D) = (S_3, S_4), (S_4, S_3) \end{cases}$$



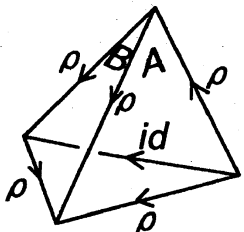
$$= \begin{cases} \frac{e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{12}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (B, C) = (S_3, S_3), \\ -\frac{e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{12}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (B, C) = (S_4, S_3), \\ \frac{\sqrt{-1}e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{12}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (B, C) = (S_3, S_4), (S_4, S_4) \end{cases}$$



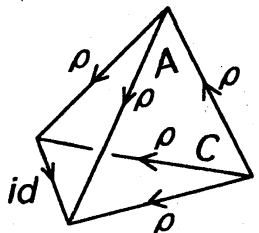
$$= \begin{cases} 0 & \text{if } (B, D) = (S_3, S_3), (S_4, S_4) \\ -\frac{\sqrt{-1}}{d} & \text{if } (B, D) = (S_4, S_3), \\ \frac{\sqrt{-1}}{d} & \text{if } (B, D) = (S_3, S_4) \end{cases}$$



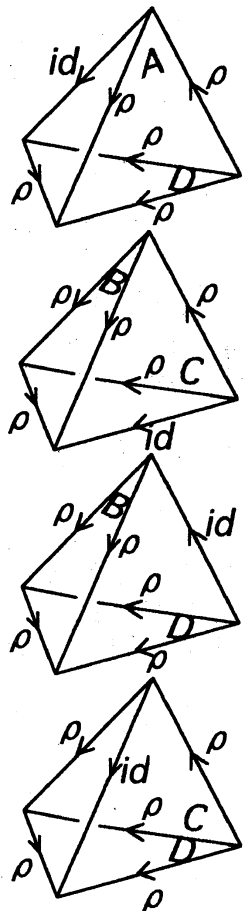
$$= \begin{cases} \frac{e^{\frac{-5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (C, D) = (S_3, S_3), (S_4, S_4), (S_4, S_3) \\ -\frac{e^{\frac{-5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (C, D) = (S_3, S_4) \end{cases}$$



$$= \begin{cases} \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d} & \text{if } (A, B) = (S_3, S_3), \\ \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d} & \text{if } (A, B) = (S_4, S_4), \\ 0 & \text{if } (A, B) = (S_3, S_4), (S_4, S_3) \end{cases}$$

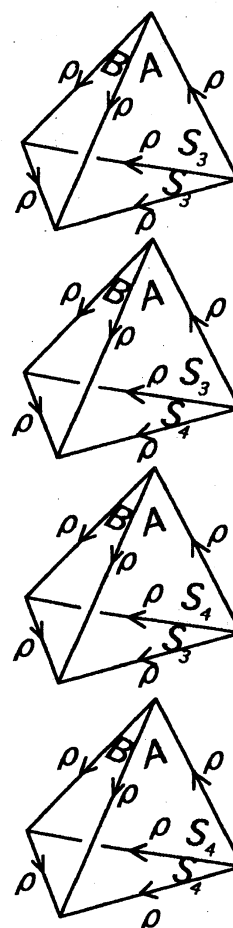


$$= \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{if } (A, C) = (S_3, S_3), (S_4, S_4), \\ 0 & \text{if } (A, C) = (S_3, S_4), (S_4, S_3) \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{if } (A, D) = (S_3, S_3), (S_4, S_4), \\ 0 & \text{if } (A, D) = (S_3, S_4), (S_4, S_3) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{12}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (B, C) = (S_3, S_3), (S_4, S_3) \\ -\frac{\sqrt{-1}e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{12}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (B, C) = (S_4, S_4), \\ \frac{\sqrt{-1}e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{12}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (B, C) = (S_3, S_4) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{if } (B, D) = (S_3, S_3), (S_4, S_4) \\ 0 & \text{if } (B, D) = (S_3, S_4), (S_4, S_3) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{e^{\frac{-5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (C, D) = (S_3, S_3), (S_3, S_4), (S_4, S_3) \\ -\frac{e^{\frac{-5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (C, D) = (S_4, S_4) \end{cases}
 \end{aligned}$$

V. 四面体の6つの辺のカラーがすべて ρ の場合：量子 $6j$ 記号の値は以下の値になる。



$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} -\frac{1}{d^2} & \text{if } (A, B) = (S_3, S_3), \\ \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (A, B) = (S_4, S_4), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -\frac{1}{d^2} & \text{if } (A, B) = (S_3, S_4), \\ \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (A, B) = (S_4, S_3), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (A, B) = (S_3, S_3), \\ \frac{\sqrt{-1}}{d^2} & \text{if } (A, B) = (S_4, S_4), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -\frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{d\sqrt{2}} & \text{if } (A, B) = (S_3, S_4), \\ -\frac{\sqrt{-1}}{d^2} & \text{if } (A, B) = (S_4, S_3), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$